

Обратите внимание: в этом вопроснике есть специальные инструкции. Отвечайте на вопросы, следуя этим инструкциям.

שימו לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות. יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

Математика

4 единицы обучения – первый вопросник

מתמטיקה

4 יחידות לימוד – שאלון ראשון

Указания

- א. Продолжительность экзамена: 4 часа 15 минут.
- ב. Строение вопросника и ключ к оценке:
в этом вопроснике три раздела, и в них восемь вопросов.
Раздел первый – алгебра, аналитическая геометрия и теория вероятности
Раздел второй – геометрия и тригонометрия на плоскости
Раздел третий – дифференциальное и интегральное исчисление полиномов, рациональных функций и функций, содержащих корни.
Вы должны ответить на четыре вопроса, по меньшей мере на один вопрос из каждого раздела – $4 \times 25 = 100$ баллов.
- в. Разрешенный вспомогательный материал:
1. Калькулятор без графического дисплея. При работе с калькулятором, в котором есть возможности программирования, запрещается использовать эти возможности. Использование калькулятора с графическим дисплеем или возможностей программирования может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.
 2. Листы с формулами (прилагаются).
 3. Двухязычный словарь.
- г. Особые указания:
1. Не переписывайте вопрос; укажите только его номер.
 2. Начинайте ответ на каждый вопрос с новой страницы. Запишите в тетради этапы решения (также и в том случае, когда вычисления производились с помощью калькулятора). Объясните все свои действия, включая вычисления, подробно, ясно и упорядоченно. Недостаточно подробная запись решения может привести к тому, что оценка будет снижена или экзамен будет аннулирован.

הוראות

- א. משך הבחינה: ארבע שעות ורבע.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:
בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.
פרק ראשון – אלגברה, גאומטרייה אנליטית והסתברות
פרק שני – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור
פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש
יש לענות על ארבע שאלות, לפחות על שאלה אחת מכל פרק – $4 \times 25 = 100$ נקודות.
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
 2. דפי נוסחאות (מצורפים).
 3. מילון עברי-לועזי/לועזי-עברי.
- ד. הוראות מיוחדות:
1. אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.
 2. יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. יש להסביר את כל פעולותיכם, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טייטה" בראש כל עמוד המשמש טייטה. כתיבת טייטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

Пишите только в экзаменационной тетради. Напишите слово «טייטה» в начале каждой страницы, отведенной вами под черновик. Выполнение черновых записей на листах, не относящихся к экзаменационной тетради, может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.

Вопросы

Ответьте на четыре из вопросов 1–8, по меньшей мере на один вопрос из каждого раздела (за каждый вопрос – 25 баллов).

Обратите внимание: если вы ответите более чем на четыре вопроса, будут проверены только первые четыре ответа в вашей тетради.

Раздел первый – алгебра, аналитическая геометрия и теория вероятности

1. Расстояние между городом 'א и городом 'ב составляет 600 км.

Поезд едет каждый день из города 'א в город 'ב с постоянной скоростью.

В один из дней в поезде обнаружилась неисправность, и поэтому он выехал из города 'א на 6 минут позже, чем обычно.

В этот день поезд ехал со скоростью, которая была на 10 км/ч больше, чем его обычная скорость.

В этот день поезд прибыл в город 'ב в обычное время.

(א) (1) Найдите обычную скорость поезда.

(2) Найдите время, за которое поезд доезжает из города 'א в город 'ב в обычный день.

В другой день, после того как поезд ехал в течение некоторого времени со своей обычной скоростью, ему пришлось уменьшить скорость на 40 км/ч, и поэтому он приехал в город 'ב на 27 минут позже его обычного времени прибытия.

(ב) Найдите, сколько времени в этот день поезд ехал со своей обычной скоростью.

2. Дана окружность с центром M , уравнение которой $x^2 + (y - 15)^2 = 90$.

Прямая $y = 2x$ пересекает окружность в точках A и B , как показано на чертеже справа.

(א) Найдите координаты точек A и B .

Через точку A провели касательную к данной окружности.

(ב) Найдите уравнение этой касательной.

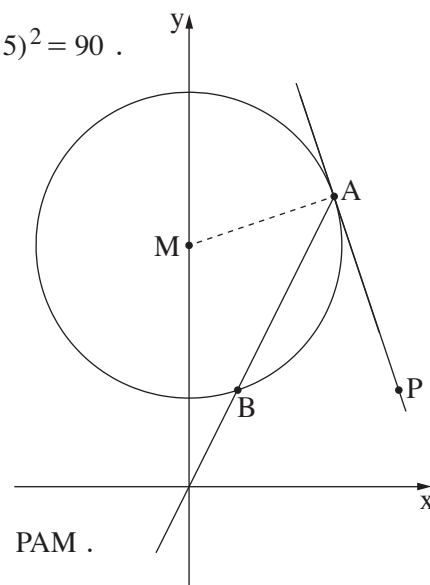
Точка P – такая точка на касательной, что прямая PB параллельна оси x .

Точка G – центр окружности, описанной вокруг треугольника PAM .

(ג) Найдите уравнение окружности, описанной вокруг треугольника PAM .

(ד) Определите, находится ли точка G на окружности с центром M , внутри нее или вне ее.

Обоснуйте свой ответ.



3. Галит и Рои играют в игру. Каждый раунд игры может закончиться одним из трех возможных результатов: победа Галит, победа Рои или ничья.

Вероятность того, что Галит победит в каком-либо раунде, в 3 раза больше вероятности того, что Рои победит в каком-либо раунде.

Вероятность того, что раунд завершится ничьей, составляет 0.28 .

(а) Найдите вероятность того, что Галит победит в каком-либо раунде игры.

В игре, в которую играют Галит и Рои, есть два раунда. Результаты этих раундов не зависят друг от друга.

(б) Какова вероятность того, что ни один раунд не завершится ничьей?

(в) Какова вероятность того, что Галит победит, по меньшей мере, в одном раунде?

(г) Известно, что Галит победила по меньшей мере в одном из раундов. Какова вероятность того, что один из раундов завершился ничьей?

Раздел второй – геометрия и тригонометрия на плоскости

4. Треугольник ABC вписан в окружность.

Прямая FA является касательной к данной окружности в точке A.

Точка D – такая точка на стороне AB, что отрезок DC параллелен данной касательной (смотрите чертеж).

(а) Докажите: $\triangle ABC \sim \triangle ACD$.

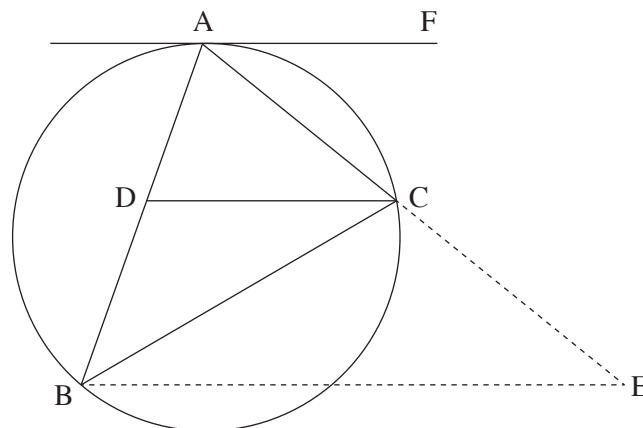
Дано: $AB = 9$, $AD = 4$.

(б) Найдите длину стороны AC.

(в) Найдите, во сколько раз площадь треугольника BCD больше площади треугольника ACD.

Точка E – такая точка на продолжении стороны AC, что отрезок BE параллелен DC.

(г) Найдите длину отрезка CE.



5. На чертеже справа изображен остроугольный треугольник ABC.

Дано: длина радиуса окружности, описанной вокруг треугольника ABC, равна 4.6,

$$BC = 9.$$

(а) Найдите величину угла BAC.

Точка D лежит на стороне AC.

Дано: $AB = 3AD$,

площадь треугольника ABD равна 6.

(б) (1) Найдите длину AD.

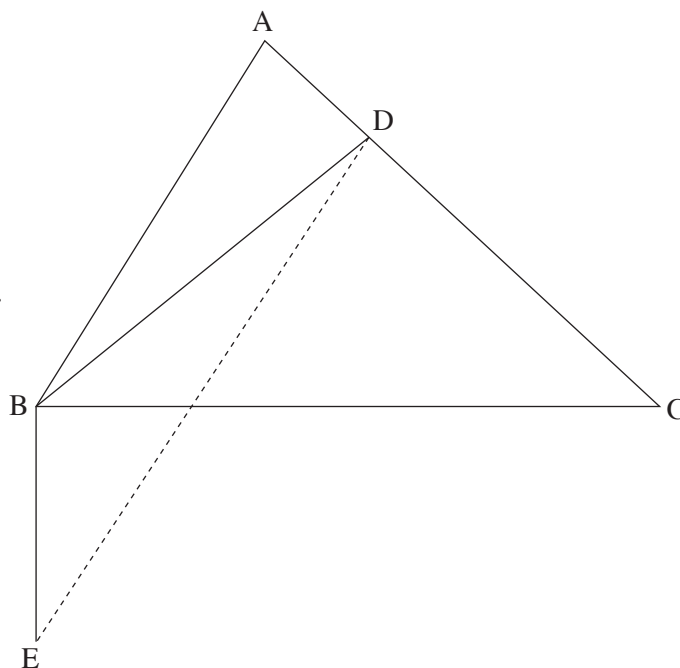
(2) Найдите величину угла ABD.

(в) Найдите величину угла ACB.

Отрезок BE перпендикулярен стороне BC, как показано на чертеже справа.

Дано: $BE = 4$.

(г) Найдите площадь треугольника DBE.



**Раздел третий – дифференциальное и интегральное исчисление полиномов,
рациональных функций и функций, содержащих корни**

6. Дана функция $f(x) = \frac{x+4}{5x-x^2} - b$. b – параметр.

(к) Найдите область определения функции $f(x)$.

(д) Найдите координаты точек экстремума функции $f(x)$ и определите их тип (при необходимости выразите при помощи b).

Дано, что прямая $y = -1$ является касательной к графику функции $f(x)$ в точке ее минимума.

(з) Найдите b .

Подставьте $b = 2$ в уравнение функции $f(x)$ и ответьте на вопросы пунктов (т)–(п).

(т) (1) Найдите уравнения асимптот функции $f(x)$, перпендикулярных осям координат.

(2) Найдите координаты точек пересечения графика функции $f(x)$ с осями координат (если таковые существуют).

(3) Начертите схематический график функции $f(x)$.

Дана функция $g(x)$, для производной которой выполняется $g'(x) = f(x) + 1$.

Область определения функции $g(x)$ идентична области определения функции $f(x)$.

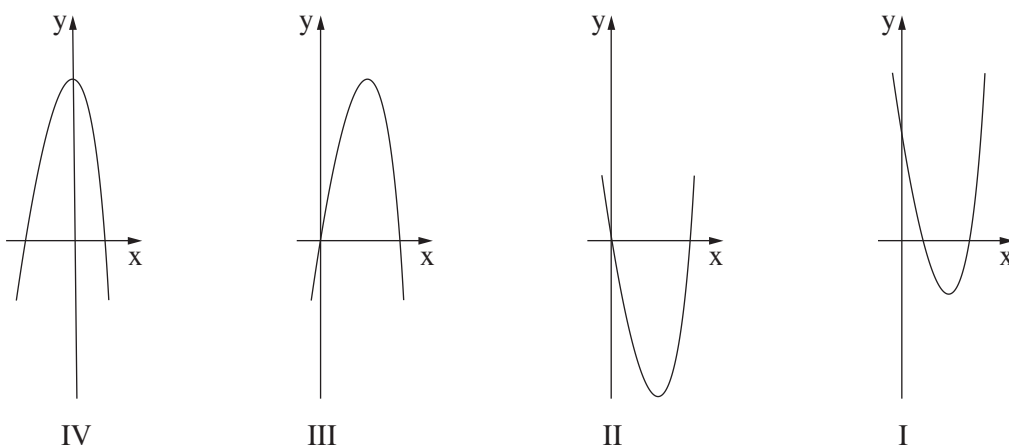
(п) Определите, есть ли у функции $g(x)$ точки экстремума. Обоснуйте свой ответ.

7. Дана функция $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{-\frac{1}{2}x + 5}$.

- (א) Найдите область определения функции $f(x)$.
- (ב) Найдите координаты точек пересечения графика функции $f(x)$ с осями координат.
- (ג) Найдите координаты всех точек экстремума функции $f(x)$ и определите их тип.
- (ד) Начертите схематический график функции $f(x)$.
- (ה) Один из графиков I–IV, приведенных в конце вопроса, соответствует производной $f'(x)$.
 Определите, какой график соответствует производной, и обоснуйте свой ответ.

Дано, что площадь фигуры, ограниченной графиком производной $f'(x)$ и графиком функции $a \cdot f'(x)$, равна 160. a – отрицательный параметр.

(ו) Найдите значение a .



8. На чертеже справа изображен график функции $f(x) = 3 - \frac{6}{x}$, в области $x > 0$.

График функции $f(x)$ пересекает ось x в точке A .

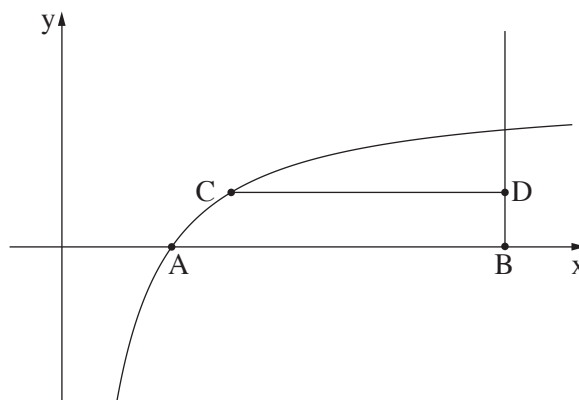
Из точки $B(8, 0)$ провели перпендикуляр к оси x .

C – некоторая точка на графике функции $f(x)$.

Обозначим через t координату x точки C ,

$$2 < t < 8.$$

Из точки C провели прямую, параллельную оси x и пересекающую данный перпендикуляр в точке D .



(א) Найдите координаты точек A , C и D .

При необходимости выразите свои ответы при помощи t .

(ב) Найдите координаты точки C , при которых площадь треугольника ACD будет максимальной.

(ג) Определите, может ли площадь треугольника ACD быть равной 1. Обоснуйте свой ответ.

Желаем успеха!

בהצלחה!